Analiza matematyczna i algebra liniowa – lista zadań nr 2.

Zad. 4. Oblicz całki z funkcji wymiernych

$$\int \frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}dx,\ \int \frac{5x^2+11x}{(x-1)^2(x^2+2)}dx,\ \int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx,\ \int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x},$$

$$\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx,\ \int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx,\ \int \frac{1}{2x^3+3x-2}dx,\ \int \frac{1}{2x^2+9}dx,\ \int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx,\ \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$$

$$\int \frac{2x^3-3x^2+15x+6}{(x^2+4)(x^24x+5)}dx,\ \int \frac{(x^2+1)}{(x^2+2x+3)^3}dx,\ \int \frac{x^3}{x+1}dx,\ \int \frac{x^5+x^4-2x^2+3}{x^2+x+2}dx,\ \int \frac{x^3+x+1}{x^3-1}dx$$

Zad. 5. Oblicz całki z funkcji niewymiernych

$$\int \sqrt[4]{3x-5}dx,\ \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx,\ \int \frac{x}{x\sqrt{2x+1}}dx,\ \int \frac{1}{2\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx,\ \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}dx,\ \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx,\ \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}dx,\ \int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx,\ \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx,\ \int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx,\ \int \frac{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$$

Zastosuj podstawienie Eulera:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

Zad. 6. Oblicz całki funkcji trygonometrycznych

Własności funkcji trygonometrycznych:

$$sin^2x+cos^2x=1;\quad sin2x=2\cdot sinx\cdot cosx;\quad cos2x=cos^2x-sin^2x=1-2sin^2x=2cos^2x-1$$

$$sinaxcosbx=\frac{1}{2}[sin(a+b)x+sin(a-b)x];$$

$$sinaxsinbx=\frac{1}{2}[cos(a-b)x-cos(a+b)x];\ cosaxcosbx=\frac{1}{2}[cos(a+b)x+cos(a-b)x];$$

$$\int cos^5x\,dx,\ \int \frac{sin^4x}{cosx}dx,\ \int \frac{sinx(1-cosx)}{1+cosx},\ \int sin^3x\cdot\sqrt[3]{cos^2x}\,dx,\ \int sinxsin3x\,dx,$$

$$\int sin3xcos2x\,dx,\ \int \frac{dx}{cos4xsin2x}$$

Podstawienie „uniwersalne”

$$t=tg\frac{x}{2},\ \ x=2arctgt,\qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$cosx=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad sinx=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{3sinx+4cosx},\ \int \frac{dx}{5-3cosx},\ \int \frac{1+sinx}{sinx(1+cosx)}dx,\ \int \frac{dx}{2sinx-cosx+5},\ \int \frac{cosx}{sin^8x}dx,\ \int \frac{dx}{sin2x\,cosx}$$

Podstawianie za tangens

$$t = tgx, \quad dt = \frac{1}{cos^2x}dx, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$cos^2x = \frac{cos^2x}{cos^2x + sin^2x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad sin^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x + sin^2x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{sin^4x \cdot cos^2x}, \quad \int \frac{dx}{1+2cos^2x}, \quad \int \frac{2sinx + 3cosx}{sin^2x \cdot cosx}dx, \quad \int \frac{dx}{1+sinx}, \quad \int \frac{dx}{1+tgx}, \quad \int \frac{dx}{2+cosx}$$

Zad. 7. Wykonaj obliczenia całek oznaczonych

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx, \quad \int_1^{16} \sqrt[4]{x^3}dx, \quad \int_3^3 e^{3x}dx, \quad \int_{-2}^3 |x|\,dx, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Oblicz pole figury ograniczonej prostymi i funkcjami:

$a)\; y = 1 + sinx; \quad x = 0; \quad x = \infty; \quad y = 0$
$b)\; y = x^3; \quad y = -x^2 + 2x; \quad x \geq 0; y \geq 0$
$c)\; y^2 = 4x; \quad y = 2x - 4$
$d)\; y = e^x; \quad x = 1; \quad x = 0; \quad y = 0;$
$e)\; y = x^2 + x - 6; \quad x = -1; \quad x = 1; \quad y = 0$
$f)\; y = -x + 3; \quad y = x + 3; \quad y = 0$
$g)\; y = x; \quad y = x - 4; \quad y = 0; \quad y = 2$